ПРАВИЛО ОСТАНОВА ПО СОСЕДНИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ В ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Василькович С.И., 5 курс,
Савчук В.Ф., к.физ.-мат.н., доцент,
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

В гильбертовом пространстве *H* решается операторное уравнение I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным и самосопряженным оператором A в предположении, что нуль не является собственным значением оператора. Причем нуль принадлежит спектру оператора A, т.е. задача некорректна. Если решение уравнения существует, то для его отыскания предлагается явный итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + \alpha Ay, \; x_0 = 0 \tag{2}$$

Правую часть *y*, как это обычно бывает на практике, считаем заданной приближенно, т.е. вместо y известно δ-приближение $y_\delta, \|y - y_\delta\| \le \delta.$ Тогда метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2)x_{n,\delta} + \alpha Ay_\delta, x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Доказана сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций. Показано, что метод (3) сходится при условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|^2}$, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/2}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0.$ В предположении, что точное решение x истокообразнопредставимо, т.е. $x = A^s z, \; s > 0$ получена оценка погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{s/2}(2n\alpha e)^{-s/2}\|z\| + \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} 2(n\alpha)^{1/2}\delta. \tag{4}$$

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, невозможно найти априорные оценки погрешности (4) и априорный момент останова $n_{опт}$ Однако и в этом случае метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться правилом останова по соседним приближениям. Ниже будем считать оператор A ограниченным положительным и несамосопряженным. Тогда метод (3) примет вид

$$z_{n+1} = (E - \alpha(A^*A)^2)z_n + \alpha(A^*A)A^*y_\delta + (E - \alpha(A^*A)^2)u_n, \; z_0 \in H. \tag{5}$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta.$ Обозначим $C = E - \alpha(A^*A)^2, B = \alpha(A^*A)A^*.$ Тогда метод (5) запишется в виде $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m итерационного процесса определим условием

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon. \tag{6}$$

Доказано, что метод (5) с правилом останова (6) сходится и получена оценка для момента останова. Справедлива теорема.

Теорема. Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, то момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n, удовлетворяющих условиям $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, то справедлива оценка

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$, $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, где $d > 1$, $p \in (0,1)$, то $\lim\limits_{\delta, \beta \to 0} \|z_m - x\| = 0$.

Предложенный метод может быть успешно применён для решения задач, встречающихся в спектроскопии, акустике, синтезе антенн, автоматической обработке результатов эксперимента, обратных задачах теплопроводности.