ИССЛЕДОВАНИЕ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ, ПОСТРОЕННОЙ ПО МЕТОДУ УЭЛЧА

Войнов А.Ф., 4 курс,
Мирская Е.И., доцент, к.физ.-мат.н.,
УО «Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина»

При статистической обработке данных, полученных в результате наблюдений за явлениями в различных областях человеческой деятельности, приходится иметь дело с анализом временных рядов. Часто при этом используют спектральные методы обработки информации.

Спектральный анализ временных рядов является одним из основных направлений в исследованиях учёных многих стран мира, причём особое внимание уделяется методам спектрального анализа стационарных случайных процессов с дискретным временем.

Одной из главных задач спектрального анализа временных рядов является построение и исследование оценок спектральных плотностей стационарных случайных процессов, так как они дают важную информацию о структуре процесса.

Задача спектрального анализа временных рядов имеет много методов решений. Одним из методов спектрального оценивания, позволяющих получить оценку спектральной плотности непосредственно по исходному набору данных, является метод Уэлча, в котором осреднение производится по множеству периодограмм, получаемых по непересекающимся интервалам исходной последовательности данных и вводится окно просмотра данных для уменьшения смещения оценок.

Рассмотрим r-мерный стационарный случайный процесс $X(t) = \left\{X_a(t), a = \overline{1,r}\right\}$, $t \in Z$, с $MX_a(t) = 0$, $a = \overline{1,r}$, неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, $a, b = \overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1), ..., X_a(T-1)$ $-T$ последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за составляющей $X_a(t)$, процесса $X(t)$, $t \in Z$, $a = \overline{1,r}$, и $T = LN$, где L число непересекающихся интервалов разбиения длины N.

Используя метод Уэлча, в работе в качестве оценки взаимной спектральной плотности исследована статистика вида

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} I_{ab}(\lambda, l), \qquad (1)$$

где

$$I_{ab}(\lambda, l) = d_a(\lambda, l)\overline{d_b(\lambda, l)}, \qquad (2)$$

$l = \overline{1, L}$, $a, b = \overline{1, r}$, $\lambda \in \Pi$ – модифицированная периодограмма на l-ом интервале разбиения.

$$d_a(\lambda, l) = \left(2\pi\sum_{t=0}^{N-1} h_a^2(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=0}^{N-1} h_a(t) X_a(t + (l-1)N) e^{-i\lambda(t+(l-1)N)}, \qquad (3)$$

$l = \overline{1, L}$, $a = \overline{1, r}$, $\lambda \in \Pi$ – модифицированное конечное преобразование Фурье наблюдений на l-м интервале разбиения, причём наблюдения сглаживаются одним и тем же окном просмотра данных $h_a(t)$, $t \in Z$.

Исследованы некоторые статистические свойства оценки $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$. Найдено математическое ожидание и дисперсия построенной оценки. Доказаны

Теорема 1. Математическое ожидание оценки взаимной спектральной плотности $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$, задаваемой соотношением (1), имеет вид

$$M\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \int_{\Pi} f_{ab}(x + \lambda)\Phi_{ab}(x)dx, \qquad (4)$$

где

$$\Phi_{ab}(x) = \left[2\pi\sum_{t=0}^{N-1} h_a(t)h_b(t)\right]^{-1} \varphi_a(x)\overline{\varphi_b(x)}, \qquad (5)$$

$$\varphi_a(x) = \sum_{t=0}^{N-1} h_a(t)e^{itx}, \qquad (6)$$

$x \in \Pi$.

Теорема 2. Пусть функция $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$ ограничена на Π и непрерывна в точке $\lambda \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$, функция $\Phi_{ab}(y)$ является ядром на Π, тогда

$$\lim_{T\to\infty} M\ \hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = f_{ab}(\lambda).$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$M\ \hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) - f_{ab}(\lambda) = \int_{\Pi} f_{ab}(x + \lambda)\Phi_{ab}(x)dx - f_{ab}(\lambda).$$

Используя свойства ядра $\Phi_{ab}(x)$, получим

$$\left|M\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) - f_{ab}(\lambda)\right| \le \int_{\Pi} |\Phi_{ab}(x)| |f_{ab}(x + \lambda) - f_{ab}(\lambda)| dx =$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} |\Phi_{ab}(x)| |f_{ab}(x + \lambda) - f_{ab}(\lambda)| dx + \int_{\delta < |x| \le \pi} |\Phi_{ab}(x)| |f_{ab}(x + \lambda) - f_{ab}(\lambda)| dx = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим каждый из интегралов. Учитывая непрерывность $f_{ab}(x)$ в точке λ, имеем, что для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$, так что если $|x| < \delta$, то $|f_{ab}(x + \lambda) - f_{ab}(\lambda)| \le \varepsilon$. Тогда, учитывая свойства ядра, получим

$$I_1 \le \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} |\Phi_{ab}(x)| dx \le \varepsilon.$$

Так как взаимная спектральная плотность ограничена на Π, то

$$I_2 \le 2 \max_x \left| f_{ab}(x) \right| \int\limits_{\delta < |x| \le \pi} \left| \Phi_{ab}(x) \right| dx \xrightarrow[T \to \infty]{} 0 .$$

Теорема доказана.