ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ В РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Дроздов П.А., Карасевич И.В., 2 курс,
Асмыкович И.К., доцент, к.физ.-мат.н.,
УО «Белорусский государственный технологический университет»

Решение многих экономических задач сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Если мы получаем аналитическое решение, то можем полностью изучить исследуемый экономический процесс и дать рекомендации по его улучшению. Но аналитическое решение можно найти только для уравнений определенного типа, в частности, для : уравнений с разделяющимися переменными, однородных дифференциальных уравнений первого порядка и линейных уравнений. Каждый тип таких дифференциальных уравнений имеет свой определённый аналитический метод решения, что увеличивает время его решения и требует довольно глубоких познаний в теории дифференциальных уравнений. Но существует достаточно универсальный способ решения, который применим ко всем выше указанным типам обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Он применяется для уравнений в полных дифференциалах.

Уравнение $M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$ [1]. называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x;y)$, т.е.

$$M(x;y)dx + N(x;y)dy = du(x;y) \qquad (1)$$

Тогда ДУ (1) можно записать в виде $du(x;y) = 0$, а его общий интеграл будет: $u(x;y) = C$. Приведём условие, по которому можно судить, что выражение $\Delta = M(x;y)dx + N(x;y)dy$ есть полный дифференциал.

<u>Теорема</u>: Для того, чтобы выражение $\Delta = M(x;y)dx + N(x;y)dy$, где функции $M(x;y)$ и $N(x;y)$ и их частные производные $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области D плоскости oxy, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнения условия $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

При выполнении этого условия общий интеграл уравнения (1) можно записать в одном из двух видов:

$$\int_{x_0}^{x} M(x;y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0;y)dy = C \text{ или } \int_{x_0}^{x} M(x;y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x;y)dy = C$$

где $(x_0;y_0)$ - любая фиксированная точка из области D. Числа x_0 и y_0 нужно выбирать так, чтобы вычисления были как можно проще.

Если равенство $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ не выполняется, то умножим уравнение (1) на функцию $\mu = \mu(x;y)$:

$$\mu M(x;y)dx + \mu N(x;y)dy = 0 \qquad (2)$$

и выберем μ так, чтобы для уравнения (2) выполнялось условие $\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$. Функция $\mu(x;y)$ называется интегрирующим множителем.

Таким образом, все вышеперечисленные типы дифференциальных уравнений первого порядка в полных дифференциалах и уравнения, приводящиеся к ним с помощью интегрирующего множителя, могут быть решены аналитически таким универсальным способом. В данной работе более подробно описывается данная методика аналитического решения, и приводятся примеры нахождения интегрирующего множителя. Также для сравнения рассматривается пример стандартного решения дифференциальных уравнений определённого типа и решение с помощью интегрирующего множителя. Изучены несколько конкретных уравнений, возникающих при математическом моделировании конкретных экономических процессов.