ОСТАНОВ ПО НЕВЯЗКЕ В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Козак И.П., 5 курс,
Матысик О.В., к.физ.-мат.н., доцент,
УО «Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина»;

В гильбертовом пространстве *H* решается операторное уравнение

$$Ax = y \qquad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором *A*, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что $0 \in S_A$, поэтому задача (1) неустойчива и, значит, некорректна. Для решения задачи предлагается метод итерации

$$x_{n+1} = x_n + \alpha A^2 (y - Ax_{n+1}), \quad \alpha > 0, \; x_0 = 0. \qquad (2)$$

Предполагая существование единственного точного решения *x* уравнения (1) при точной правой части *y*, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A^2 (y_\delta - Ax_{n+1,\delta}), \quad \alpha > 0, \; x_{0,\delta} = 0. \qquad (3)$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и момент *m* останова итерационного процесса (3) определим условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \; (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \qquad (4)$$

Ниже метод итераций (3) с остановом (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta \to 0} \left(\inf\limits_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0$.

Обозначим через $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(1 + \alpha\lambda^3\right)^{-n}\right]$. Справедливы

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$. *Тогда для* $\forall w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \to 0, \; n \to \infty$.

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$. *Тогда для* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s \left\|A^s \left(E - Ag_n(A)\right)v\right\| \to 0, n \to \infty, \quad 0 \le s < \infty$.

Лемма 3. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$. *Если для некоторых* $n_k < \overline{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $w_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$, *то* $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$.

Теорема. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (4). *Тогда метод* (3) *сходится*.

Предложенный метод может быть применён для решения некорректных задач, встречающихся в технике, системах полной автоматической обработки экспериментов.