

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ НЕЯВНОГО ТИПА В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Матусевич А.Л., 5 курс,

Матысик О.В., к.физ.-мат.н., доцент,

УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Введение. В последние десятилетия математическая наука обогатилась важным разделом – теорией некорректно поставленных задач и методов их приближённого решения. Развитие этого раздела математики вызвано многочисленными приложениями в технике, физике, экономике и других естественных науках, поскольку, прежде всего, в приложениях возникают и имеют большое значение подобные некорректные задачи. Потребности практики приводят к необходимости решения некорректно поставленных задач, которые во многих случаях описываются операторными уравнениями первого рода. Для их решения широко используются итерационные схемы.

Постановка задачи. Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H операторное уравнение I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A , для которого нуль является собственным значением, т. е. задача (1) имеет неединственное решение. Предположим, что $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнения решение (неединственное) задачи (1) существует. Для его отыскания используем неявную итерационную процедуру

$$(E + \alpha^2 A^2)x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Сходимость метода в случае неединственного решения уравнения. Обозначим: $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H . Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$.

Теорема. Пусть $A \geq 0$, $y \in H$, $\alpha > 0$. Тогда для (2) верны следующие утверждения:

а) $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) процедура (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$, где x^* – минимальное решение уравнения.

Замечание. Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \rightarrow x^*$, т. е. процедура (2) сходится к решению с минимальной нормой.

Предложенный метод может быть успешно применён для решения некорректных задач, встречающихся в технике, спектроскопии, экономике.