ВЫБОР МОМЕНТА ОСТАНОВА ИТЕРАЦИОННОЙ СХЕМЫ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Наумовец С.Н., 5 курс,
Матысик О.В., к.физ.-мат.н., доцент,
УО «Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина»

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение $Ax = y_\delta$, где A – оператор положительный, ограниченный, несамосопряжённый и $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A. Однако $0 \in S_A$, поэтому рассматриваемая задача неустойчива и, следовательно, некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнение имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left[z_n + \alpha\left(A^*A\right)A^*y_\delta\right] + \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}u_n,\ \ \alpha > 0,\ \ z_0 = 0,\ \ (1)$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причём $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}$, $B = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)A^*$. Тогда метод (1) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$. Метод (1) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям: зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова *m* определим условиями $\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon,\ (n < m),\quad \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon$.
Справедлива

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) *если* $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова m определён при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\|, \|u_n\| \le \beta$;

б) *если* $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка* $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)}$;

в) *если, кроме того,* $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0,\ \delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1,\ p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta \to 0} \|z_m - x\| = 0$.

Предложенный метод может быть успешно применён для решения некорректных задач, встречающихся в технике, гравиметрии, спектроскопии.