О НЕКОТОРЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ РЕШЕНИЯ СЛАУ С РЕГУЛЯРИЗУЮЩИМИ СВОЙСТВАМИ

Панасик Д.А., 4 курс,
Мадорский В.М., к.физ.-мат.н., доцент,
УО «Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина»

Вопросу итерационного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) посвящена обширная литература. Модуль решения СЛАУ используется в качестве базового модуля при решении нелинейных уравнений методами типа Ньютона с регулировкой шага. Этим объясняется необходимость в эффективных алгоритмах решения СЛАУ. Прямые методы решения СЛАУ достаточно эффективны, когда размерность матрицы СЛАУ не превосходит 150-500. При размерности системы более 1000 время обмена между оперативной и дисковой памятью при решении СЛАУ прямыми методами становится столь большим, что теряются все преимущества прямых методов. Итерационные методы решения СЛАУ не теряют своих достоинств с ростом размерности. Итерационные методы позволяют эффективно организовать «подкачку» информации с жесткого диска в случае достаточно большой размерности матрицы. К числу недостатков почти всех итерационных методов следует отнести жесткие требования к начальному приближению, если матрица системы не обладает хорошими специальными свойствами (симметричность, положительная определенность).

Предлагаемый ниже итерационный процесс решения уравнения

$$Ax = b, \tag{1}$$

где $A = [a_{ij}]$, i, j= 1..n, x=(x1, x2, ..., xn,), b=(b1, b2, ..., bn,), не предполагает, что матрица A обладает специальными свойствами и сходится с "плохого" начального приближения. Определим итерационный процесс так:

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n \frac{\|Ax_n - b\|^2 (A^* + \alpha \|Ax_n - b\|^2 E)(Ax_n - b)}{\|(A^* + \alpha \|Ax_n - b\|^2 E)(Ax_n - b)\|^2} = x_n - \beta_n \Delta x_n \qquad (2)$$

$$\beta_n = \frac{W_n}{W_n + \|A(x_n - \Delta x_n) - b\|^2} \quad \alpha = 10^{-8} - 10^{-12}, n = 0,1,2,... \qquad (3)$$

$$W_{n+1} = (1 - 2\beta_n) W_n + \beta_n^2 (W_n + \|A(x_n - \Delta x_n) - b\|^2) \qquad (4)$$

Теорема. Пусть в области $D = \left\{ x : W_{n+1} \le \|A(x_n - \Delta x_n) - b\|^2 \right\}$ все нормы $\|A(x_n - \Delta x_n) - b\|^2$ ограничены и в D существует x* — решение уравнения (1). Тогда итерационный процесс (2) - (4) сходится к x*.

Доказательство данной теоремы вполне аналогично процессам, рассмотреных в [1].

Замечание . Ограниченности последовательности $\{\|A(x_n - \Delta x_n) - b\|^2\}$ можно добиться следующим образом: из (3) следует, что $\beta_n \|A(x_n - \Delta x_n) - b\|^2 = (1 - 2\beta_n),\ W_n < W_0$.

Полагая, что $\beta_{n-1} \approx \beta_n$ в соотношении (3) в знаменателе правой части вместо $\|A(x_n - \Delta x_n) - b\|^2$ величину $\beta_n \|A(x_n - \Delta x_n) - b\|^2$ так что

$$\beta_n = \frac{W_n}{W_n + \beta_{n-1} \|A(x_n - \Delta x_n) - b\|^2};\ \beta_{-1} = 10^{-2} - 10^{-4} \qquad (5)$$

Численный эксперимент и его обсуждение

Элементы матрицы системы и вектора правой части уравнения (1) до 50 порядка формировались случайным образом и далее находилось решение с помощью описанного выше процесса. Результаты просчетов сведены в таблицу, в которой указан процент завершения просчетов до определенного числа итераций.

Таблица – Результаты расчетов

Размерность системы	Количество итераций		
	$\|Ax_n - b\| \le 10^{-5}$	$\|Ax_n - b\| \le 10^{-10}$	$\|Ax_n - b\| \le 10^{-15}$
10	до 600 — 77%	до 2 000 — 73%	до 3 000 — 77%
20	до 1000 — 76%	до 5 000 — 85%	до 10 000 — 76%
30	до 3 000 — 85%	до 5 000 — 79%	до 7 500 — 70%
40	до 5 000 —80%	до 5 500 — 72%	до 10 000 — 69%

Данные показывают, что, во-первых генерируется порядка 25% "плохих" систем, во- вторых, с увеличением точности просчетов на каждые 5 порядков число итераций увеличивается примерно вдвое, в третьих, разумная точность просчетов достигается.