СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рыбачук Георг.Г., Рыбачук Григ.Г., 4 курс,
Мадорский В.М., к.физ.-мат.н., доцент,
УО «Брестский Государственный Университет имени А.С. Пушкина»

Рассматривается нелинейное уравнение:

$f(x) = 0,\ f(D \subset X \rightarrow X),\ X$ – B – пространство, $f \in C_D^{(2)}$ (1)

Для решения уравнения (1) существует ряд итерационных процессов типа Ньютона-Рафсона. Однако эффективных нелокальных итерационных процессов для решения уравнения (1) предлагается не очень много.

Предлагаемые итерационные процессы сравниваются по эффективности с рядом известных нелокальных итерационных процессов: методом Ермакова В.И. – Калиткина Н.Н. и методом Жанлава Т. – Пузынина И.В.

Рассмотрим ниже регуляризованные итерационные процессы, суть которых состоит в том, что вместо линейного уравнения ньютоновского типа

$$f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n) \qquad (2)$$

на каждом шаге итерационного процесса для нахождения элемента Δx_n решается линейная система вида

$$\left(\beta_n \|f(x_n)\|^2 E + \overline{f'(x_n)} f'(x_n)\right)\Delta x_n = -\overline{f'(x_n)} f(x_n) \qquad (3)$$

с положительно – определённой матрицей. Здесь $f'(x_n)$ - производная Фреше оператора f на элементе x_n, где Е – единичный оператор.

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \qquad (4)$$

а итерационные параметры β_n находятся по одному из следующих правил:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \beta_n \frac{\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}\right),\ \beta_0 \in (10^{-4}, 10^{-1}) \qquad (5)$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right), \qquad (6)$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{W_n}{\alpha\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right), \qquad (7)$$

$$\alpha > 1,\ W_{n+1} = (1-\beta_{n+1})W_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \|f(x_{n+1})\|,\ W_0 = \|f(x_0)\| \qquad (8)$$

Метод №I определяется процессом (3),(4),(5). Метод №2 определяется процессом (3),(4),(6). Метод №3 определяется процессом (3),(4),(7),(8). Метод Жанлава Т. – Пузынина И.В., определяемый процессом (2),(4),(5) фигурирует у нас под номером 4, метод Ермакова В.И. – Калиткина Н.Н., определяемые формулами (2), (4) с β_n имеющим вид:

$$\beta_n = \frac{\|f(x_n)\|^2}{\|f(x_n)\|^2 + \|f(x_n)\|^2},$$

описан в нашей работе под номером 5.

Численные эксперименты.

Для проверки эффективности процессов №1 - №5 рассматриваются системы вида:

I. $f_i(x) = x_i + \sum_{j=1}^{N} x_j - N - 1 = 0;\ i = \overline{1, N-3},$

$$f_{N-2}(x) = \prod_{i=1}^{N} x_i - 1 = 0;$$

$$f_{N-1}(x) = arctg(x_1) - arctg 1 = 0;$$

$$f_N(x) = \cos^3(x_1) + \sin^2(x_n) - \cos^3 1 - \sin^2 1 = 0$$

II. системы 2-4 – тестовые системы, предложенные Дэннисом Дж., Шнабелем Р. (Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.). Результаты просчётов сведены в таблицу:

№ системы	1 (n=44)		2 (n=44)		3 (n=44)		4 (n=4)	
	Точность							
№ метода	10-e8	10-e13	10-e8	10-e13	10-e8	10-e13	10-e8	10-e13
I	74	82	64	64	23	НР	22	23
2	68	76	56	57	18	НР	16	17
3	77	85	73	73	28	29	22	22
4	68	76	56	57	18	НР	16	17
5	57	66	НР	НР	34	34	23	24

Можно сделать вывод о том, что наилучшим методом является метод №3, так как он является самым стабильным методом и при решении всегда получается самый хороший радиус сходимости. Неплохими методами являются методы №1, №2 и №4. Области сходимости этих процессов уже, чем у метода №3. Метод №5 при решении некоторых систем требуют «хорошие» начальные значения.

Результаты работы могут быть применены в теории нелинейных колебаний и во всех прикладных задачах, где используется нелинейный модуль.

Замечание: НР – метод в этом случае не работает.