# СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Соколовский Д.Б., 4 курс,*
*В.Ф.Савчук, к.физ.-мат.н., доцент,*
*УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»*

В гильбертовом пространстве *H* решается уравнение I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

где *A* – ограниченный положительный и самосопряжённый оператор, в предположении, что нуль принадлежит спектру оператора *A*, но не является его собственным значением. Тогда задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) существует, то будем искать его с помощью итерационного метода

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y),\ x_0 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью $\delta$, т. е. известно $y_\delta$ такое, что $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Тогда метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta),\ x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Показано, что метод (3) сходится к точному решению при условии $0 < \alpha_i < \frac{2}{\|A\|}$, если число итераций *n* выбирать в зависимости от уровня погрешности $\delta$ так, чтобы $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\delta \to 0$ при $n \to \infty,\ \delta \to 0$. При условии, что точное решение истокообразнопредставимо, т. е. $x = A^s z,\ s > 0$ получена оценка погрешности $\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le s^s \left( \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \right)^{-s} \left\| z \right\| + \left( \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \right) \delta$.

Покажем, что метод (2) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора *A* (случай неединственного решения уравнения (1)). Обозначим $N(A) = \{ x \in H \mid Ax = 0 \}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до *H*. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Доказана

<u>Теорема</u>. Пусть $A \ge 0,\ y \in H,\ 0 < \alpha_i < 2$, тогда для итерационного процесса (2) верны следующие утверждения

а) $Ax_n \to \Pi(A)y,\quad \left\| Ax_n - y \right\| \to J(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \left\| Ax - y \right\|$;

б) процесс (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, где $x^*$ – минимальное решение уравнения (1).

<u>Замечание.</u> Так как у нас $x_0 = 0$, то метод (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

Предложенный метод может быть успешно применён для решения задач спектроскопии, акустики, синтеза антенн, автоматической обработки результатов эксперимента, обратных задач теплопроводности.