К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГРАДИЕНТНЫМ МЕТОДОМ

Соловей Д.В., 4 курс,
Савчук В.Ф., к.физ.-мат.н., доцент,
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

В гильбертовом пространстве *H* решается уравнение I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

где *A* – ограниченный положительный и самосопряжённый оператор, в предположении, что нуль принадлежит спектру оператора *A*, но не является его собственным значением. Тогда задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) существует, то будем искать его с помощью итерационного метода

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}\left(Ax_n - y\right), x_0 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью δ, т. е. известно y_δ такое, что $\left\|y - y_\delta\right\| \le \delta$. Тогда метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}\left(Ax_{n,\delta} - y_\delta\right), x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Показано, что метод (3) сходится к точному решению при условии $0 < \alpha_i < \frac{2}{\|A\|}$, если число итераций *n* выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\delta \to 0$ при $n \to \infty,\ \delta \to 0$. При условии, что точное решение истокообразнопредставимо, т. е. $x = A^s z,\ s > 0$ получена оценка погрешности $\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le s^s(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)^{-s}\|z\| + (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\delta$.

Априорный выбор числа итераций для метода (3) был получен при условии, что точное решение уравнения (1) истокопредставимо. Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокопредставимости s. Тем не менее, метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке.

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент *m* останова зададим условиями

$$\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \tag{4}$$

Справедлива

<u>Теорема</u>. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (4), тогда $x_{m,\delta} \to x$. Если при этом $x = A^s z$, $s > 0$, то справедливы оценки

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{\beta e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}, \quad \|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} +$$

$$+ \gamma\left\{1 + \frac{(s+1)}{\beta e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \qquad (5)$$

<u>Замечание 1.</u> Порядок оценки (5) есть $0\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.

<u>Замечание 2.</u> Предположение порядка $s > 0$ истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, т. к. оно не содержится в правиле останова по невязке. Число итераций выбирается по правилу (4) автоматически.

Предложенный метод может быть успешно применён для решения задач спектроскопии, акустики, синтеза антенн, автоматической обработки результатов эксперимента, обратных задач теплопроводности.