ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ЭКОНОМИКЕ

Трофимов А.В., 2 курс,
Климашевская И.Н., к.физ.-мат.н., доцент,
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Традиционно практическое приложение интеграла иллюстрируется вычислением площадей различных фигур, нахождением объемов тел и некоторыми приложениями в физике и технике.

Интегральное исчисление дает богатый математический аппарат для моделирования и исследования процессов, происходящих в экономике. Так, в ходе изучения определенного интеграла студент может наглядно познакомиться с методами решения экономических задач, связанных с анализом воздействия конкретных мер государственной политики на благосостояние потребителей и производителей продукции. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих приложение определенного интеграла для решения задач такого типа.

В курсе микроэкономики часто рассматривают так называемые предельные величины, т.е. для данной величины, представляемой некоторой функцией y=f(x), рассматривают её производную f´(x). Например, если дана функция издержек C в зависимости от объема q выпускаемого товара C=C(q), то предельные издержки будут задаваться производной этой функции MC=C´(q). Её экономический смысл – это издержки на производство дополнительной единицы выпускаемого товара. Поэтому часто приходится находить функцию издержек по данной функции предельных издержек, используя операцию интегрирования.

При определении экономической эффективности капитальных вложений встречаются так называемые задачи дисконтирования: определение начальной суммы S через время t по ее конечной величине S_t при процентной ставке p.

При непрерывном начислении процента конечная сумма вычисляется по формуле $S_t = Se^{rt}$, где $r = 0{,}01p$. Если сумма S_t также является функцией времени f(t), то дисконтированная сумма к моменту времени t составит $S = f(t)e^{-rt}$.

Полная дисконтированная сумма за время *t* вычисляется по формуле $S_d = \int_0^t f(t)e^{-rt}dt$

Пример. Определим дисконтированную сумму S_d при $f(t) = S_0\,(1+kt)$, где S_0 — начальные капиталовложения, *k* — ежегодная доля их увеличения. Иными словами, при заданных величинах *p* и *k* требуется оценить, что выгоднее: наращивать капиталовложения или вложить их одновременно при непрерывно начисляемой процентной ставке.

Решение. Вычисляя указанный интеграл методом интегрирования по частям, получаем

$$S_d = \int_0^t S_0(1+kt)e^{-rt}dt = S_0\left\{-\frac{1}{r}e^{-rt}\Big|_0^t - \frac{k}{r}\int_0^t t\,d(e^{-rt})\right\} = S_0\left\{\frac{1}{r}(1-e^{-rt}) - \frac{k}{r}te^{-rt}\Big|_0^t + \frac{k}{r}\int_0^t e^{-rt}dt\right\} =$$

$$= S_0\left\{\frac{1}{r}\left(1+\frac{k}{r}\right) - \frac{1}{r}\left(1+kt+\frac{k}{r}\right)e^{-rt}\right\}.$$

Из полученной формулы можно сделать некоторые выводы:

1. Чем выше процентная ставка *p* (а значит, и r), тем меньше дисконтная сумма S_d и, следовательно, выше доход, вычисляемый как разность между суммой ежегодно растущих капиталовложений за *t* лет и величиной S_d. Если рассматривать S_d как дисконтный доход, то увеличение процентной ставки *p* снижает рентабельность помещения капитала.
2. Увеличение интенсивности ежегодных капиталовложений *(k)* приводит к увеличению S_d.
3. При неизменных *p* и *k* дисконтный доход растет с увеличением промежутка времени *t* (количества лет).

При оценочных расчетах в реальных условиях следует учитывать существенную роль темпа инфляции, который, в первую очередь, определяет приемлемую величину промежутка *t*. Очевидно, что при высоком уровне инфляции выгодны только краткосрочные капиталовложения.

В заключении отметим, что решение задач, иллюстрирующих приложение изучаемой математической теории в экономике, позволяет студентам на конкретных примерах увидеть, как абстрактные математические понятия и факты можно эффективно применять к решению задач в профильной для них дисциплине. Кроме того, использование прикладных задач экономического содержания на лекциях по математике, ориентированных на дальнейшую их специализацию в области экономики, способствует реализации многих целей обучения математике, в том числе развитию познавательного интереса, творческих и интеллектуальных способностей студентов.