ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ

Худяков А.П., магистрант,
Мадорский В.М., к.физ-ма.н., доцент,
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Одной из важнейших задач прикладной математики является задача аппроксимации функций. Пусть в точках $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_N = b$ отрезка [a,b] известны значения *f(x_i)*, $i = \overline{0, N}$ некоторой функции *f(x)*. Необходимо восстановить в аналитическом виде неизвестную функцию *f(x)* на всем отрезке [a,b]. Будем искать приближенную функцию $\tilde{f}(x)$ в виде $P_m(x) = \{P_{m,i}(x),\ x_{i-1} \le x \le x_i\},\ i = \overline{1, N}$, где m – степень полинома, а второй индекс i является номером полинома (это означает, что он определен на i-том частичном отрезке). Полином $P_{m,i}(x)$ будет иметь вид:

$$P_{m,i}(x) = a_{0,i} + a_{1,i}x + a_{2,i}x^2 + ... + a_{m-1,i}x^{m-1} + a_{m,i}x^m, \quad x_{i-1} \le x \le x_i. \qquad (1)$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты $a_{j,i}$, $j = \overline{0,m}$, $i = \overline{1,N}$, необходимо построить $m+1$ соотношение для каждого полинома $P_{m,i}(x)$. Два соотношения можно получить, используя значения функции в узлах сетки. Потребуем, чтобы значения полинома на концах отрезка равнялись известным значениям функции $f(x)$, т.е.:

$$\begin{aligned} P_{m,i}(x_{i-1}) &= a_{0,i} + a_{1,i}x_{i-1} + a_{2,i}x_{i-1}^2 + ... + a_{m-1,i}x_{i-1}^{m-1} + a_{m,i}x_{i-1}^m = f(x_{i-1}), \\ P_{m,i}(x_i) &= a_{0,i} + a_{1,i}x_i + a_{2,i}x_i^2 + ... + a_{m-1,i}x_i^{m-1} + a_{m,i}x_i^m = f(x_i). \end{aligned} \qquad (2)$$

Для нахождения приближенных значений производных стандартным образом используем их представление через значения функции в точках. Причем при восстановлении непериодических функций для более точного вычисления производных в точках, близких к концам отрезка [a,b], следует компенсировать недостачу точек слева (справа) от узла x_i добавлением недостающего количества точек справа (слева). При этом общее количество точек аппроксимации производных сохраняется и равно $n+1$. В случае восстановления периодических функций, количество точек слева и справа от узла x_i одинаково, т.е. точка x_i является центральной.

В случае восстановления функции $f(x)$ полиномами степени m, необходимо вычислить производные $y^{(k)}(x_i)$, $i = \overline{0,N}$, $k = \overline{1,M}$, где $M = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$.

Далее потребуем, чтобы значения производных полинома $P_{m,i}(x)$ на концах отрезка равнялись приближенным значениям вычисленных ранее производных.

Для нахождения неизвестных $a_{i,j}$, $i = \overline{0,M}$, $j = \overline{1,N}$ решаем N СЛАУ.

Если на отрезке [a,b] задана равномерная сетка, то это позволяет один раз построить LU-разложение и решить все N систем, используя это разложение.

Простой подсчет показывает, что на вычисление всех коэффициентов требуется $\frac{13}{6}(m+1)^3 N$ операций. В случае восстановления функции на неравномерной сетке алгоритм требует примерно $\frac{13}{12}(N+1)mn^3 + \frac{13}{6}(m+1)^3 N$ арифметических операций. Общее время работы алгоритма на равномерной сетке примерно равно $\frac{13}{12}mn^4 + nN + \frac{2}{3}(m+1)^3 + N(m+1)^2$. Оценка погрешности осуществлялась по норме L^2.

В результате работы было протестировано 2 функции вида:

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}}{2\pi(1+\varepsilon-\cos x)}$, $x \in [-\pi;\pi]$, $\varepsilon = 0.21$

2) $f(x) = 0.3 + \sin y + \sin^2 y + 0.02\sin(40y)$, $y = \left(\dfrac{16}{15}x - \varepsilon\right)$, $x \in [-1;1]$, $\varepsilon = 0.7$

Приведем результаты численных экспериментов:

Таблица 1 – Точность восстановления функции 1.

N	m=7	m=9	m=11	m=13
192	9,11885068756661E-15	5,18939919947691E-17	5,29312212895089E-17	5,43747148499694E-17
256	9,13619831117243E-16	3,56378524417662E-19	1,74632476698947E-19	1,80382886098853E-19
384	3,56737288822766E-17	2,43007726719648E-20	2,43555942616395E-20	2,4967436032531E-20
512	3,57097014471485E-18	2,43742222095381E-20	2,47662248315181E-20	2,55625438697336E-20

Таблица 2 – Точность восстановления функции 2.

N	m=7	m=9	m=11	m=13
192	1,16550316362228E-12	1,47596352369893E-13	1,47540679294605E-13	1,4753999431547E-13
256	1,14426238603369E-13	1,53248147140979E-16	1,50895090622926E-16	1,50954912228493E-16
384	4,46822976714338E-15	7,53558486025033E-18	7,1286493660798E-18	7,18867830818284E-18
512	4,46841712526896E-16	2,51702544902018E-17	2,56227540059472E-17	2,59506686305594E-17

Результаты эксперимента показывают, что наилучшие результаты аппроксимации получаются при использовании сетки из 384 точек и m=11. Результаты работы могут быть эффективно использованы в задачах, где исходные данные получены экспериментально.