УДК 519.65 + 517.548.5

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО МАТРИЧНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ

Т.Н. Афанасович, Е.И. Мацулевич*, 3 курс*
Научный руководитель – ***А.П. Худяков****, к.ф.-м.н.*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

В [1, с. 136–137] построен тригонометрический вариант интерполяционной формулы Лагранжа–Сильвестра для произвольных 2π-периодических целых функций. Ранее Л.А. Яновичем получена аналогичная формула для случая четных 2π-периодических функций [2].

Рассмотрим обобщение данных интерполяционных многочленов на случай кратных собственных значений матричного аргумента. Пусть A – квадратная матрица размерности $(n+1)(n+1)$, ее различные собственные значения $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ имеют соответственно кратности $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, причем $n=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_m-1$. Рассмотрим далее 2π-периодическую функцию $F(z)$, целую или регулярную в области $D\subset\mathbb{C}$, содержащей спектр матрицы A. Ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k\cos kz+\beta_k\sin kz).$$

Теорема. *Для матрицы A с различными собственными значениями $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, имеющими соответственно кратности $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, где $n=\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_m-1$, и целой или регулярной в области $D\subset\mathbb{C}$, содержащей спектр матрицы A, 2π-периодической функции $F(z)$ имеет место равенство*

$$F(A)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\alpha_k-1}\frac{(-1)^{\nu}}{\sin^{\nu}\lambda_k}H_{\nu k}(\cos A)\times$$

$$\times\left(\left(F^{(\nu)}(\lambda_k)+(-1)^{\nu}F^{(\nu)}(-\lambda_k)\right)I+\frac{d^{\nu}}{d\xi^{\nu}}\left\{\frac{F(\xi)-F(-\xi)}{\sin\xi}\right\}_{\xi=\lambda_k}\sin A\right). \quad (1)$$

где I – единичная матрица, а многочлены $H_{\nu k}(z)$ определяются формулой

$$H_{\nu k}(z)=\frac{\omega_n(z)}{\nu!(\alpha_k-\nu-1)!}\frac{d^{\alpha_k-\nu-1}}{d\xi^{\alpha_k-\nu-1}}\left\{\frac{1}{\omega_{nk}(\xi)(z-\xi)}\right\}_{\xi=\tilde{\lambda}_k=\cos\lambda_k},$$

$$\omega_n(z)=(z-\cos\lambda_0)^{\alpha_0}(z-\cos\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(z-\cos\lambda_m)^{\alpha_m},\quad \omega_{nk}(\xi)=\frac{\omega_n(\xi)}{(\xi-\cos\lambda_k)^{\alpha_k}}.$$

Пример. Для квадратной матрицы A третьего порядка, имеющей собственные значения λ_0 второй, а λ_1 первой кратностей $(\lambda_0\neq\lambda_1)$ в соответствии с формулой (1) справедливо равенство

$$F(A)=\frac{1}{2}\left(\left(F(\lambda_0)+F(-\lambda_0)\right)I+\frac{F(\lambda_0)-F(-\lambda_0)}{\sin\lambda_0}\sin A\right)H_{00}(\cos A)-$$

$$-\frac{1}{2\sin\lambda_0}\left(\left(F'(\lambda_0)-F'(-\lambda_0)\right)I+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(F'(\lambda_0)+F'(-\lambda_0)\right)\sin\lambda_0-\left(F(\lambda_0)-F(-\lambda_0)\right)\cos\lambda_0}{\sin^2\lambda_0}\sin A\right)H_{10}(\cos A)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left(F(\lambda_1)+F(-\lambda_1)\right)I+\frac{F(\lambda_1)-F(-\lambda_1)}{\sin\lambda_1}\sin A\right)H_{01}(\cos A), \qquad (2)$$

где

$$H_{00}(\cos A)=-\frac{(\cos A-(2\cos\lambda_0-\cos\lambda_1)I)(\cos A-\cos\lambda_1 I)}{(\cos\lambda_0-\cos\lambda_1)^2},$$

$$H_{10}(\cos A)=\frac{(\cos A-\cos\lambda_0 I)(\cos A-\cos\lambda_1 I)}{\cos\lambda_0-\cos\lambda_1},\ \ H_{01}(\cos A)=\frac{(\cos A-\cos\lambda_0 I)^2}{(\cos\lambda_0-\cos\lambda_1)^2}.$$

Рассмотрим матрицу $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, собственное значение $\lambda_0=1$ которой имеет кратность $\alpha_0=2$, а $\lambda_1=2$ – кратность $\alpha_1=1.$ Тогда формула (2) примет вид

$$F(A)=\frac{1}{2}\left(\left(F(1)+F(-1)\right)I+\frac{F(1)-F(-1)}{\sin 1}\sin A\right)H_{00}(\cos A)-$$

$$-\frac{1}{2\sin 1}\left(\left(F'(1)-F'(-1)\right)I+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(F'(1)+F'(-1)\right)\sin 1-\left(F(1)-F(-1)\right)\cos 1}{\sin^2 1}\sin A\right)H_{10}(\cos A)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left(F(2)+F(-2)\right)I+\frac{F(2)-F(-2)}{\sin 2}\sin A\right)H_{01}(\cos A).$$

Для целой функции $F(A)=e^{\sin A}$ получим

$$F(A)=\frac{1}{2}\left(\left(e^{\sin 1}+e^{-\sin 1}\right)I+\frac{e^{\sin 1}-e^{-\sin 1}}{\sin 1}\sin A\right)H_{00}(\cos A)-$$

$$-\frac{1}{2\sin 1}\left(\cos 1\left(e^{\sin 1}-e^{-\sin 1}\right)I+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(e^{\sin 1}+e^{-\sin 1}\right)\sin 1\cos 1-\left(e^{\sin 1}-e^{-\sin 1}\right)\cos 1}{\sin^2 1}\sin A\right)H_{10}(\cos A)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left(e^{\sin 2}+e^{-\sin 2}\right)I+\frac{e^{\sin 2}-e^{-\sin 2}}{\sin 2}\sin A\right)H_{01}(\cos A)=$$

$$=\left(1{,}37543I+1{,}12226\sin A\right)H_{00}(\cos A)-$$

$$-\left(0{,}60636I+0{,}19318\sin A\right)H_{10}(\cos A)+$$

$$+\left(1{,}44269I+1{,}14361\sin A\right)H_{01}(\cos A),$$

где

$$H_{00}(\cos A)=-\frac{(\cos A-(2\cos 1-\cos 2)I)(\cos A-\cos 2I)}{(\cos 1-\cos 2)^2}=$$

$$=-1,09314\left(\cos A-1,49675I\right)\left(\cos A+0,416147I\right),$$

$$H_{10}(\cos A)=\frac{(\cos A-\cos 1I)(\cos A-\cos 2I)}{\cos 1-\cos 2}=$$

$$=1,04553\left(\cos A-0,540302I\right)\left(\cos A+0,416147I\right),$$

$$H_{01}(\cos A)=\frac{(\cos A-\cos 1I)^2}{(\cos 1-\cos 2)^2}=1,09314(\cos A-0,540302I)^2.$$

После преобразований будем иметь

$$e^{\sin A}\approx-0,0446587\sin 3A-0,28022\cos 2A-0,0000731889\sin 2A-$$
$$-0,000747342\cos A+1,12983\sin A+1,25922I.$$

Список использованных источников

1. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.

2. Makarov, Volodymyr L. Methods of Operator Interpolation / Volodymyr L. Makarov, Volodymyr V. Khlobystov, Leonid A. Yanovich. – Київ : Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.