УДК 519.6 + 517.983.54

НЕЯВНАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С САМОСОПРЯЖЁННЫМ ОПЕРАТОРОМ

***А.Н. Прокопук**, 4 курс*
*Научный руководитель – **О.В. Матысик**, к.ф.-м.н., доцент*
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

Для решения в гильбертовом пространстве уравнения первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором *A* (0 не является его собственным значением, но $0 \in SpA$, и, следовательно, рассматриваемая задача некорректна) используем неявную итерационную процедуру

$$(E+\alpha A)x_{n+1} = (E-\alpha A)x_n + 2\alpha y,\; x_0 = 0. \tag{2}$$

Здесь $E -$ тождественный оператор.

В случае приближённой правой части $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$ метод (2) примет вид

$$(E+\alpha A)x_{n+1,\delta} = (E-\alpha A)x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta,\; x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Справедлива **Теорема 1.** *Итерационный процесс неявного типа* (2) *при условии* $\alpha > 0$ (4) *сходится*.

Доказательство.

По индукции легко проверить, что $x_n = A^{-1}\left[E - (E-\alpha A)^n (E+\alpha A)^{-n}\right]y$. Поэтому имеем

$$x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A)^n (E + \alpha A)^{-n} y = \int_0^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y =$$

$$= \int_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y.$$

При $\alpha > 0$ и $\lambda \in (0, M]$, где $M = \|A\|$, имеет место неравенство $\left|\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right| < 1$ и, следовательно, последний интеграл очевидным образом стремится к нулю по норме:

$$\left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le q^n \left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = q^n \left\|\int_\varepsilon^M dE_\lambda x\right\| \le q^n \|x\| \to 0,\ n \to \infty.$$

(Здесь $\left|\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right| \le q < 1, \lambda \in [\varepsilon, M]$).

$$\left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le \left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = \left\|\int_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

в силу свойств спектральной функции E_λ [1, с. 302].

Таким образом, при условии (4) $\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$, т. е. процесс (2) сходится при точной правой части y уравнения (1). Теорема 1 доказана.

Справедливы

Теорема 2. *Если выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$, *то при условии* (4) *итерационный процесс* (3) *сходится.*

Теорема 3. *Если решение уравнения* (1) *истокообразно представимо* ($x = A^s z,\ s > 0$), *то при условии* (4) *для метода итераций* (3) *справедлива оценка погрешности*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \max\left\{s^s (4n\alpha)^{-s},\ M^s \left(\frac{\alpha M - 1}{\alpha M + 1}\right)^n\right\} \|z\| + 2n\alpha\delta. \qquad (5)$$

Замечание. *Очевидно, при* $n \to 0$ *величина* $M^s \left(\frac{\alpha M - 1}{\alpha M + 1}\right)^n$, *убывающая как геометрическая прогрессия, станет меньше величины* $s^s (4n\alpha)^{-s}$, *убывающей как* $\frac{1}{n^s}$. *Следовательно, для достаточно больших n в оценке* (5) *будет фигурировать величина* $s^s (4n\alpha)^{-s} \|z\|$.

Предложенным методом могут быть успешно решены прикладные некорректные задачи математической экономики, теории оптимального управления, линейной алгебры, техники, спектроскопии и медицины [2, с. 224].

Список использованных источников

1. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В.Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.

2. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.